

УДК 338

## Экономико-математическая модель оптимальной цены товара

Журавлев В.А., к.э.н., доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**Аннотация.** В статье рассматривается экономико-математическая модель оптимальной цены товара, которая позволяет определить цену товара, при которой предприятие получит максимальную прибыль в заданном периоде.

**Ключевые слова:** оптимальная цена товара, постоянные затраты, переменные затраты, максимальная прибыль.

## Economic and mathematical model of the optimal price of goods

Shchuravlev V.A. - Ph.D., Associate Professor

the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**Annotation.** The article considers the economic and mathematical model of the optimal price of goods, which allows to determine the price of the goods at which the company will receive the maximum profit in a given period.

**Keywords:** optimal price of goods, constant costs, variable costs, maximum profit.

**Цена – денежное выражение рыночной стоимости товара.** Главное требование к цене – она должна покрывать затраты и давать прибыль предприятию (торговой организации). Нижний уровень цены определяется себестоимостью продукции (товара), а верхний уровень определяется рынком. Продажи товара в натуральных единицах зависят от цены, качества товара и уровня конкуренции.

Рассмотрим линейную регрессионную модель продаж товара за период (месяц, декада, неделя, квартал) в зависимости от цены:

$$Y = A - B \cdot C, \quad (1)$$

где  $Y$  – объем продаж в натуральных единицах за заданный период;  $C$  – цена товара в периоде (фиксированная или средняя);  $A > 0$ ,  $B > 0$  – положительные коэффициенты регрессии, которые определяются из статистических данных или экспертно, см. рис. 1.

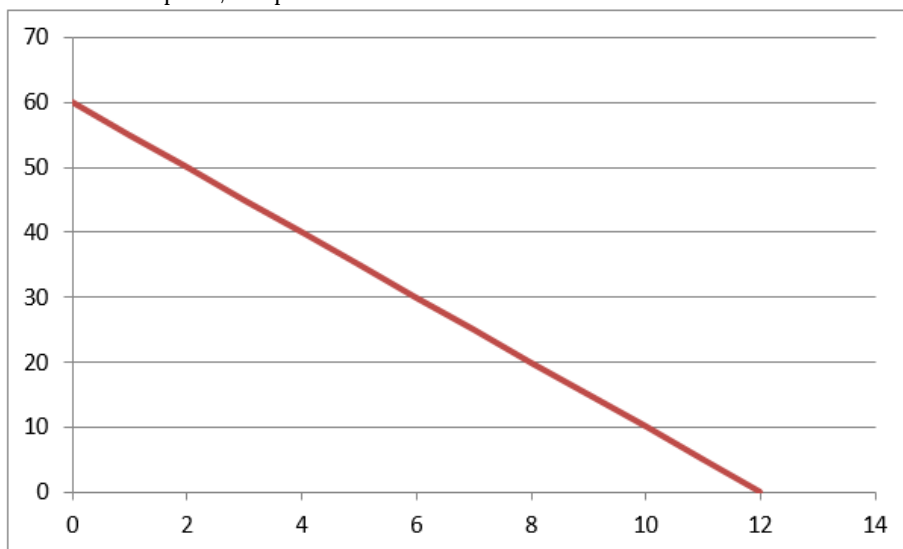


Рис.1. График продаж товара в зависимости от цены. Ось X – цены, ось Y – продажи товара в нат. ед.

В простейшем случае линейную модель (1) можно построить по двум точкам. Из (1) следует, что при увеличении цены продажи снижаются, а при снижении цены продажи увеличиваются. Если цена  $C=A/B$ , то продажи будут равны нулю. Это выполняется, когда на рынке есть товары конкуренты с более низкими ценами. Если рассматривается товарная группа, то ее цена определяется как средняя цена по всем товарам группы.

Прибыль, выручка, затраты и себестоимость товара за рассматриваемый период определяется соотношениями:

$$ПР = ВВР - ЗАТ, \quad (2)$$

$$ВВР = Y \cdot C = (A - B \cdot C) \cdot C,$$

$$ЗАТ = ПО + ПЕ, \quad (3)$$

$$ПЕ = ПЕ1 \cdot Y = ПЕ1 \cdot (A - B \cdot C),$$

$$\text{Себ} = \text{ПЕ1} + \text{ПО} / \text{У},$$

где ВыР – выручка, ЗАГ – затраты на производство и реализацию товаров У в заданном периоде, ПО – постоянные затраты относимые на товар в плановом периоде, ПЕ – переменные затраты на производство и реализацию товара за период, ПЕ1 – переменные затраты на единицу товара, Себ – себестоимость товара.

К постоянным затратам относятся затраты, которые не зависят от объема произведенной продукции, товаров, работ, услуг, в т.ч.: постоянная зарплата, амортизация, аренда, коммунальные расходы, платежи по кредитам, налог на прибыль, другие постоянные платежи и отчисления.

К переменным затратам относятся затраты, которые зависят от объема произведенных продукции, товаров, работ и услуг, это прямые материальные, энергетические и трудовые затраты на производство и реализацию продукции, товаров, работ и услуг.

Из (2) и (3) получим выражение для прибыли в зависимости от цены и затрат:

$$\text{ПР} = (\text{А} - \text{В} \cdot \text{Ц}) \cdot \text{Ц} - (\text{ПО} + \text{ПЕ1} \cdot (\text{А} - \text{В} \cdot \text{Ц})), \text{ или} \quad (4)$$

$$\text{ПР} = -\text{В} \cdot \text{Ц}^2 + (\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1}) \cdot \text{Ц} - (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1}).$$

Т.е. зависимость прибыли от цены выражается полиномом второй степени:

$$\text{ПР} = a \cdot \text{Ц}^2 + b \cdot \text{Ц} + c, \quad (5)$$

где  $a = -\text{В}$ ,  $b = \text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1}$ ,  $c = -(\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1})$ .

Дискриминант полинома (5) равен

$$D = b^2 - 4ac. \quad (6)$$

Известно, что если  $D > 0$ , то полином (5) имеет два действительных корня, если  $D = 0$  – один корень, если  $D < 0$  – корней нет. Корни полинома (5) равны:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \quad (7)$$

Из формулы (6) получаем, что дискриминант прибыли (4) равен:

$$D = (\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2 - 4 \cdot \text{В} \cdot (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1}). \quad (8)$$

Таким образом, есть только три возможности:

1) если  $D < 0$ , т.е.  $(\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2 < 4 \cdot \text{В} \cdot (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1})$ , то функция прибыли (4) не имеет действительных корней и товар будет убыточным при любых ценах, см. рис.2;

2) если  $D > 0$ , т.е.  $(\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2 > 4 \cdot \text{В} \cdot (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1})$ , то функция прибыли (4) имеет два положительных корня (7). В этом случае товар будет прибыльным, когда цена находится в промежутке между корнями, при других ценах товар убыточен, см. рис.3;

3) если  $D = 0$ , т.е.  $(\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2 = 4 \cdot \text{В} \cdot (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1})$ , то функция прибыли (4) имеет один положительный корень. В этом случае товар будет убыточным при любых ценах, кроме цены равной значению корня, где прибыль будет равна нулю, см. рис.4.

Таким образом, чтобы предприятие получало прибыль от продажи товара надо, чтобы было  $D > 0$ , или  $(\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2 > 4 \cdot \text{В} \cdot (\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1})$ , т.е.

$$\text{ПО} < \frac{(\text{А} - \text{В} \cdot \text{ПЕ1})^2}{4\text{В}}, \quad (9)$$

а цена товара находилась в интервале между корнями (7)

$$x_1 < \text{Ц} < x_2. \quad (10)$$

Если условия (9) и (10) не выполняются, то товар будет убыточным при любых ценах.

**Оптимальная цена товара Ц\***, при которой прибыль будет максимальной, определяется из равенства нулю производной функции прибыли (4) от цены, т.е.

$$\text{Ц}^* = \frac{\text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1}}{2\text{В}}. \quad (11)$$

Если надо, чтобы оптимальная цена была равна заданному значению Цз, то из (11) получаем условие для ПЕ1:

$$\text{ПЕ1} = 2 \cdot \text{Цз} - \text{А} / \text{В}.$$

После этого надо определить функцию прибыли, дискриминант, корни (7) и соотношения (9) – (11).

**Пример 1.** На основе статистических данных за прошлые месяцы предприятием построена линейная регрессионная модель продаж товара  $Y = \text{А} - \text{В} \cdot \text{Ц} = 60 - 5 \cdot \text{Ц}$  нат.ед., т.е.  $\text{А} = 60$ ,  $\text{В} = 5$ , см. рис. 1.

На плановый месяц для товара определены постоянные затраты  $\text{ПО} = 100$  ден.ед. и переменные на единицу товара  $\text{ПЕ1} = 4$  ден.ед. Требуется определить цены, при которых продажа товара будет давать прибыль предприятию.

**Решение:** Найдем функцию прибыли (5)  $\text{ПР} = a \cdot \text{Ц}^2 + b \cdot \text{Ц} + c$ ; где  $a = -\text{В} = -5$ ;  $b = \text{А} + \text{В} \cdot \text{ПЕ1} = 60 + 5 \cdot 4 = 80$ ;  $c = -(\text{ПО} + \text{А} \cdot \text{ПЕ1}) = -(100 + 60 \cdot 4) = -340$ .

Функция прибыли равна:  $\text{ПР} = -5 \cdot \text{Ц}^2 + 80 \cdot \text{Ц} - 340$ . Дискриминант прибыли отрицательный  $D = b^2 - 4ac = 6400 - 6800 = -400$ , значит корней у функции прибыли нет, поэтому товар при функции спроса  $Y = 60 - 5 \cdot \text{Ц}$  и затратах  $\text{ПО} = 100$ ,  $\text{ПЕ1} = 4$  будет убыточным при любых ценах. График функции прибыли представлен на рис.2. Прибыль отрицательна, т.е. товар убыточен при любых ценах.

**Пример 2.** В примере 1 определить условия и цены, при которых продажа товара будет давать прибыль предприятию, оптимальную цену товара Ц\*, продажи товара У\*, выручку, затраты, прибыль, себестоимость и рентабельность товара при оптимальной цене.

**Решение:** Соотношения (9) и (10) дают условия, при которых предприятие будет получать прибыль от продажи товара. Вычислив значение правой части (9) получим, что при  $\text{ПО} < 80$  и ценах в промежутке между корнями (10) продажа товара будет давать прибыль предприятию. Примем  $\text{ПО} = 70$  ден.ед., тогда функция прибыли (4) будет иметь вид:



$$ПР = -5 \cdot Ц^2 + 80 \cdot Ц - 310. \quad (12)$$

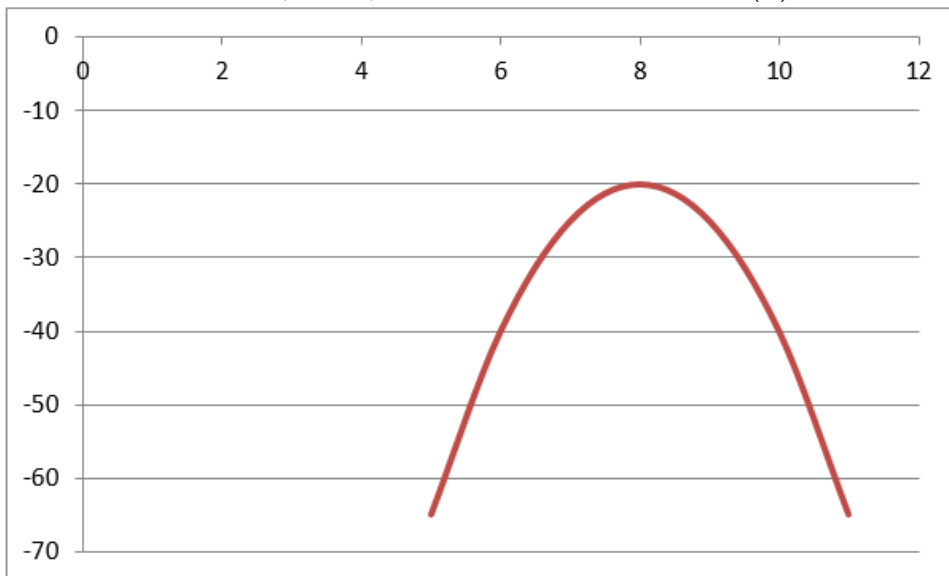


Рис.2. График прибыли примера 1. Дискриминант  $D < 0$ , товар убыточен при любых ценах.  
Ось X – цены, ось Y – прибыль.

Дискриминант прибыли положительный  $D = 200 > 0$  и функция прибыли (12) имеет два корня (7)  $x_1 = 6,6$  и  $x_2 = 9,4$ . Поэтому, если цена товара будет в интервале  $6,6 < Ц < 9,4$ , продажи товара будут давать прибыль, а если цена будет вне этого интервала, то продажи товара будут убыточны.

Оптимальная цена товара (11), при которой прибыль будет максимальна  $Ц^* = (60 + 5 \cdot 4) / 10 = 8,0$  ден.ед. Максимальная прибыль (12) при оптимальной цене  $ПР^* = -5 \cdot 8^2 + 80 \cdot 8 - 310 = 10$  ден.ед.; продажа товара в натуральных единицах в плановом периоде  $У^* = А - В \cdot Ц^* = 60 - 5 \cdot 8 = 20$  нат.ед.; выручка  $ВЫР = Ц^* \cdot У^* = 8 \cdot 20 = 160$  ден.ед.; полные затраты на производство и реализацию товара  $ЗАТ^* = ПО + ПЕ1 \cdot У^* = 70 + 4 \cdot 20 = 150$  ден.ед.; себестоимость товара  $Себ^* = ПЕ1 + ПО / У^* = 4 + 70 / 20 = 7,5$  ден.ед.; рентабельность товара  $Рен^* = (ПР / ЗАТ) \cdot 100\% = 10 / 150 \cdot 100\% = 6,7\%$ . Прибыль также равна  $ПР^* = ВЫР^* - ЗАТ^* = 160 - 150 = 10$  ден.ед.

График функции прибыли представлен на рис.3. На графике видно, что прибыль положительна при ценах между корнями в интервале  $6,6 < Ц < 9,4$ , а максимальная прибыль  $ПР^* = 10$  достигается при средней цене интервала, оптимальной цене  $Ц^* = 8$ , на концах интервала прибыль равна нулю.

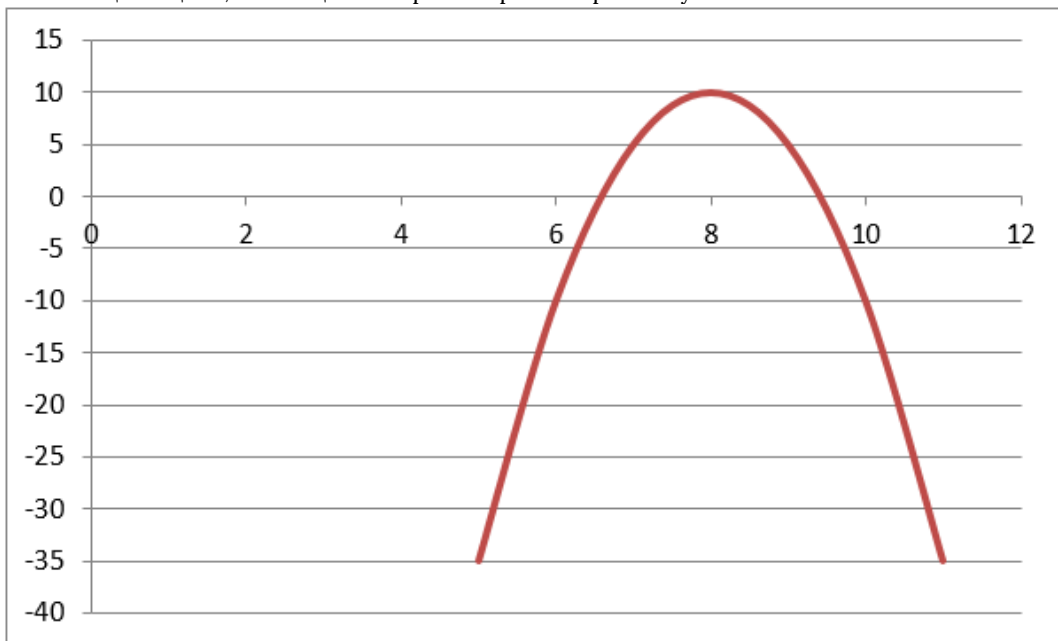


Рис.3. График прибыли примера 2. Дискриминант  $D > 0$ , продажа товара будет прибыльной если цена будет в диапазоне  $6,6 < Ц < 9,4$ . При других ценах товар будет убыточен.  
Максимальную прибыль предприятие получит если цена будет равна  $Ц^* = 8$ .

Решение примера 2 представлено в таблице 1.

Таблица 1. Решение примера 2

Наименование параметра	Обозначение	Значение
<b>Исходные данные</b>		
Плановый период	Тпл	месяц
Товар	–	наименование
Функция продаж от цены, нат.ед.	У	$У=60-5\cdot Ц$
Постоянные затраты, относимые на товар в плановом периоде, ден.ед.	ПО	70
Переменные затраты на единицу товара, ден.ед.	ПЕ1	4
<b>Решение</b>		
Функция прибыли, ден.ед.	ПР	$ПР=-5Ц^2+80Ц-310$
Интервал прибыльных цен, ден.ед.	$x_1 < Ц < x_2$	$6,6 < Ц < 9,4$
Оптимальная цена товара, ден.ед.	Ц*	8
Объем продаж при оптимальной цене, нат.ед.	У*	20
Себестоимость товара, ден.ед.	$Себ^*=ПЕ1+ПО/У^*$	7,5
Выручка при оптимальной цене, ден.ед.	ВЫР*	160
Переменные затраты на объем товара У*, ден.ед.	ПЕ*	80
Затраты всего, ден.ед.	$ЗАТ^*=ПО+ПЕ^*$	150
Прибыль при оптимальной цене, ден.ед.	ПР*	10
Рентабельность товара, %	$Рен=ПР/ЗАТ^*\cdot 100$	6,7%

**Пример 3.** Определить прибыльность товара из примера 1 при постоянных затратах  $ПО=80$ .

**Решение.** Если  $ПО=80$ , то функция прибыли (4) имеет вид

$$ПР = -5\cdot Ц^2 + 80\cdot Ц - 320. (13)$$

Дискриминант  $D=0$ , значит функция прибыли имеет только один корень  $x_1=8$ . Поэтому при всех ценах товар будет убыточным, кроме цены  $Ц=8$ , при которой прибыль  $ПР=0$ . График функции прибыли (13) представлен на рис. 4.

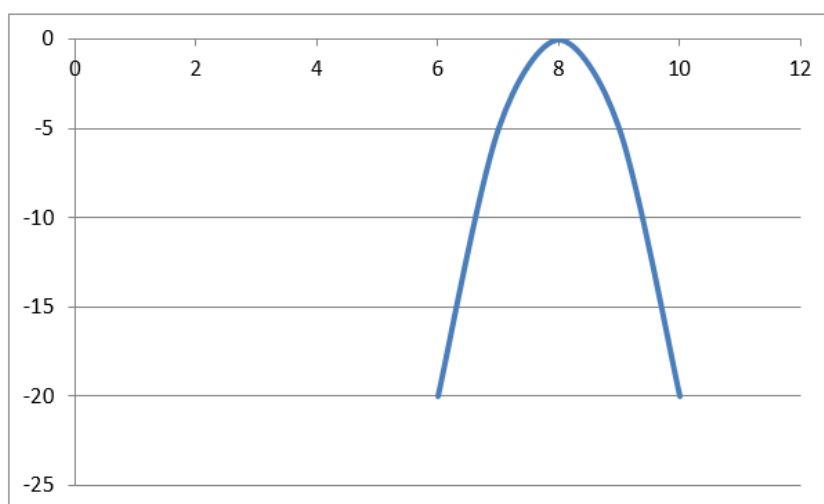


Рис. 4. График прибыли примера 3. Дискриминант  $D=0$ , при цене  $Ц=8$  прибыль будет равна нулю, при других ценах товар убыточен.

Таким образом, данная экономико-математическая модель позволяет определять условия и цены, при которых продажа товаров будет давать прибыль предприятию и оптимальную цену, при которой прибыль будет максимальной.

Если предприятие или торговая организация продает несколько видов товаров (товарных групп), то рассмотренную экономико-математическую модель надо применять к каждому товару (товарной группе). При этом сумма постоянных затрат предприятия, их распределение между товарами и цены должны быть такими, чтобы предприятие выполнило все свои обязательства и получило максимальную прибыль в плановом периоде.

#### Литература:

1. Журавлёв, В. А. Математические методы и модели принятия маркетинговых решений: учеб. метод. пособие / В. А. Журавлёв. – Минск : БГУИР, 2019. – 96 с.
2. Сак, А.В., Журавлев В.А. Оптимизация маркетинговых решений / А.В. Сак, В.А. Журавлев. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 304 с.