Анализ устойчивости динамической системы

Грошев Лев Николаевич, доцент кафедры экономики в энергетике и промышленности НИУ «МЭИ»
Рогожникова Наталия Львовна, старший преподаватель кафедры прикладной математики МГТУ ГА

В данной статье рассматриваются условия равновесия частного случая динамической системы Вальраса - Леонтьева, в зависимости от значений параметров.

Введем обозначения:
x^i – общий объем выпуска товара *i*, c^i – конечный спрос на этот товар,
r^i – суммарное предложение фактора *i*, p^i – цена товара *i*,
v^i – цена фактора *i*.
Под *x, c, r, p*, и *v* будем понимать вектор – столбцы ($x^1; x^2;\ldots; x^n$),
($c^1; c^2;\ldots; c^n$), ($r^1; r^2;\ldots; r^n$), ($p^1; p^2;\ldots; p^n$), ($v^1; v^2;\ldots; v^{m+1}$) соответственно. Зафиксируем теперь $v^{m+1} = 1$, $\bar{v} =$($v^1; v^2;\ldots; v^m$), $\bar{r} =$ ($r^1; r^2;\ldots; r^m$).

Пусть матрица *A* является матрицей коэффициентов затрат сырья и материалов, элемент a_{ij} которой обозначает количество товара *i*, расходуемое на единицу товара *j*; и пусть матрица B является матрицей коэффициентов затрат факторов, элемент b_{ij} которой задает количество фактора *i*, потребляемого при производстве единицы товара *j*. Штрих при векторе означает его транспонирование. *K* – диагональная матрица, элементы которой k_i положительны.

Для формулировки математической модели введем следующие предположения [1]:
1) Объемы выпуска товаров постоянно приспосабливаются таким образом, чтобы поддерживать равновесие на их рынках;
2) если избыточный спрос на фактор *i*, кроме (m + 1) – го фактора, положительный (отрицательный), то цена на этот фактор возрастает (падает); (m + 1) - й фактор называется измерителем масштаба денег;
3) выпуск товара *i* возрастает (убывает), если цена этого товара превышает (оказывается меньше) издержки на его производство;
4) цены товаров приспосабливаются таким образом, чтобы поддерживать равенство между ними и издержками производства.

Предположим также, что функции c^i и r^i являются однородными нулевой степени относительно переменных *p* и *v* и выполнено тождество:

$$p'c(p, v, 1) = v'(p, v, 1). \qquad (1)$$

Динамическая система в этом случае имеет вид [2]:

$$\begin{cases} x = Ax + c(p,\bar{v},1), \\ K\dfrac{d\bar{v}}{dt} = \bar{B}x - \bar{r}(p,\bar{v},1), \\ p' = p'A + \bar{v}'\bar{B} + b_{m+1}, \end{cases} \qquad (2)$$

$\bar{B} = b_{ij}$, $j = 1,\ldots, m$; $i = 1,\ldots, n$; b_{m+1} – $(m+1)$-я строка матрицы *B*, т.е
$b_{m+1} = (b_{m+1,1}; b_{m+1,2}; b_{m+1,n})$.

Исследуем эту систему на устойчивость. Из первого и третьего уравнения системы (2) соответственно имеем

$$x = (I - A)^{-1}c(p, \bar{v}, 1), \qquad (3)$$

$$p' = \bar{v}\ \bar{B}\ (I - A)^{-1} + b_{m+1}\ (I - A)^{-1}, \qquad (4)$$

где *I* - единичная матрица.

Исключая *x* и *p* из второго уравнения системы (2), получаем

$$K\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{B}(I - A)^{-1}c(\bar{v}) - \bar{r}(\bar{v}), \qquad (5)$$

здесь $c(\bar{v}) = c(p,\bar{v},1)$, $\bar{r}(\bar{v}) = \bar{r}(p,\bar{v},1)$. *p* определяется из уравнения (3)

В точке равновесия (p_0, $\bar{v}_0, x_0$) система (2) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 = (I - A)^{-1}c(p_0,\bar{v}_0,1), \\ 0 = \bar{B}x_0 - \bar{r}(p_0,\bar{v}_0,1), \\ p_0' = \bar{v}_0\bar{B}(I - A)^{-1} + b_{m+1}(I - A)^{-1}. \end{cases} \qquad (6)$$

Тогда из 1-го и 2-го уравнения системы (6) получаем:

$$\bar{B}(I - A)^{-1}\ c(\bar{v}_0) - r(\bar{v}_0) = 0.$$

Из уравнения (5) следует, что

$$K\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{B}(I - A)^{-1}(c(\overline{v}) - c(\overline{v}_0)) - (\overline{r}(\overline{v}) - r(\overline{v}_0)) \cdot \qquad (7)$$

Напомним определение функции Ляпунова [2], [3]:

Функция $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией Ляпунова для системы (1) на открытом множестве **Ω**, содержащем положения равновесия x_0, если:

1) $V(x)>0$ для всех $x \neq x_0$, из **Ω**, а $V(x_0)=0;$
2) $dV/dt \leq 0$ для всех $x \neq x_0$, на **Ω.**

Если x_0 - положение равновесия для системы (1) и для этой системы

найдется функция Ляпунова $V(x)$, тогда положение системы x_0 – локально устойчиво. Если, кроме того, $dV/dt \leq 0$ для всех $x \neq x_0$, на **Ω**, то x_0 локально асимптотически устойчиво.

Для исследования системы на устойчивость введем функцию Ляпунова, которая определяется равенством [1]:

$2V = (\overline{v} - \overline{v}_0)' K(\overline{v} - \overline{v}_0)$.

Дифференцируя это равенство по времени и подставляя в (7), получаем:

$$\frac{dV}{dt} = (\overline{v} - \overline{v}_0)'\overline{B}(I - A)^{-1}(c(\overline{v}) - c(\overline{v}_0)) - (\overline{v} - \overline{v}_0)'(\overline{r}(\overline{v}) - r(\overline{v}_0))$$

Доказательство того, что $dV/dt < 0$ при $v \neq v_0$ приведено в [1].

Таким образом, величина dV/dt всегда отрицательна, за исключением случая

$v = v_0$, Отсюда следует, что положение равновесия глобально устойчиво.

Экономически это означает, что если выполнены предположения 1) – 4), то цены и объемы выпуска все время остаются неотрицательными, и единственная точка равновесия локально асимптотически устойчива.

Литература:

1. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1972.
2. Минюк С.А., Березкина Н.С. Дифференциальные уравнения и экономические модели, Минск: Выш. шк., 2007.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Издательство «Наука» 1967.