УДК 517.2

Об извлечении квадратного и кубического корня из числа

Таджибаев Бахром Рузиевич, доцент
Хаитов Тожибой Омонович, ассистент
Марданов Арслан Пардаевич, ассистент
Ташкентский Государственный Технический Университет имени И.А. Каримова
Узбекистан, Ташкент

Об извлечении квадратного и кубического корня из числа. В данной статье рассматриваются методы нахождения квадратного и кубического корня из числа, а такие даны рекуррентные формулы Ньютона, приближенные формулы оценки результатов и примеры

About finding square root and cube-root of number. In this paper considered methods of finding a square root and cube-root of a number and given Newton's recurrent formula, approach schemes for evaluation of results, and examples.

Как известно, одной наиболее трудоёмких арифметических операций является извлечение корня квадратного, кубического или другой степени из числа. Процедура извлечение корня намного упрощается, если заранее известно, что корень из числа является целым числом. Но в большинстве случаев при извлечении корня приходится довольствоваться лишь найденным его приближенным значением с наперёд заданной точностью. При этом, приближенным значением величины a с точностью до числа $\varepsilon > 0$ мы будем называть любое (вообще говоря, не единственное) число x, удовлетворяющее неравенству $a-\varepsilon \le x \le a+\varepsilon$.

Приближенное равенство $\pi \approx 3{,}14$, к примеру, означает, что число 3,14 есть приближённое значение числа π с точностью до половины единицы последнего разряда, т.е. до $(2\times 10^2)^{-1}$.

В настоящей статье авторы собрали и изложили некоторые методы извлечения корней с помощью которых можно получать их приближённые значения.

В настоящее время прогресс в математике в большей степени связан с развитием электронно-вычислительных средств, компьютерных технологий.

Рассмотрим простейшее уравнение

$f(x)=0$. (*)

При определённых требованиях на функцию $f(x)$ корень $x=c$ этого уравнения может быть найден как предел последовательности итераций $x_n\ (n=1,2,3,\ldots)$ первая из которых выбирается произвольно, а все последующие определяются по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Этот метод приближенного вычисления корня уравнения (*) называется методом Ньютона и допускает очень удобную реализацию на ЭВМ.

Применительно к нашей задаче об извлечении корня из числа мы рассмотрим уравнение вида $f(x)=x^k-a$, где a положительное действительное число, а $k\ge 2$ - целое положительное число. Решение этого уравнения будет являться число $\sqrt[k]{a}$. т.е. корень степени k из положительного вещественного числа a. Для нашего частного случая формула последовательных приближений метода Ньютона будет иметь вид:

$$x_{n+1}=\frac{k-1}{k}\cdot x_n+\frac{a}{k\cdot {x_n}^{k-1}} \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

где $k{x_n}^{k-1}=f'(x_n)$

Последняя формула представляет собой очень эффективный алгоритм вычисления корня степени k из положительного действительного числа a.

Что касается первого приближения x_1 то его можно выбрать как $x_1=2^{\left[m/k\right]}$ где символ $\left[m/k\right]$ означает целую часть числа m/k, a целое число m взято нами из разложения вида $a=2^m\cdot x$ (известно, что всякое положительное действительное число a представимо единственным способом как $a=2^m\cdot x$, $\frac{1}{2}\le x<1$). Приведём ещё один способ, который широко используется в современной вычислительной математике для приближённого нахождения корня квадратного из положительного числа. В основе этого метода лежит следующая рекуррентная формула:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

где в качестве первого приближения x_1 берётся любое положительное число. Так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определённая последней рекуррентной формулой является невозрастающей, то она сходится к некоторому пределу $x>0$.

Если в рекуррентном соотношении перейти к пределу при $n\to\infty$, то мы получим:

$$x=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x}).$$

Полученная формула представляет собой уравнение для определения x и единственный положительный корень этого уравнения есть $x=\sqrt{a}$.

Еще один важный способ извлечения корня из положительного действительного числа даёт нам формула Маклорена известная из дифференциального исчисления, а именно:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

, здесь $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x=0$ производную порядка $n+1$ (n-любой фиксированный номер). Применительно к функции $f(x)=a^x$ формула Маклорена принимает вид:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\ln^n a + \ldots$$

С помощью формулы мы можем вычислить приближённо значение $\sqrt[k]{a}$ для любого целого k т.е.

$$\sqrt[k]{a} = 1 + \left(\frac{1}{1!k} + \frac{1}{2!k^2} + \ldots + \frac{1}{n!k^n} + \ldots\right)\ln a$$

Следующий алгоритм извлечения квадратного корня из положительного числа очевидно был известен математикам в средние века.

Например, для нахождения корня $\sqrt{273529}$ произведём следующие действия:

$$\sqrt{273529} = 523$$

$$\begin{array}{lll}
 & & -\\
 & & \underline{25\qquad\quad}\\
102 & 1043 & \;235\\
\times & \times & \;-\\
\underline{\;\;2} & \underline{\;\;3} & \underline{\;204\;}\\
204 & 3129 & \;\;3129\\
 & & \;-\\
 & & \;\underline{3129}\\
 & & \qquad 0
\end{array}$$

а) десятичную запись числа 273529 разобьём на группы по две цифры;

б) для старшей группы цифр, образующей число 27, подберём такую цифру, чтобы её квадрат был наибольшим, но не превосходил числа 27; такой цифрой будет 5, её и запишем в качестве первой цифры ответа;

в) из старшей группы цифр вычтем найденный в предыдущем пункте квадрат первой цифры ответа и к полученной разности (остатку) 27-25=2 припишем (снесём) следующую группу цифр 35; получим число 235;

г) удвоив записанное в ответе число 5, припишем справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру было наибольшим, но не превосходило числа 235; такой цифрой будет 2 (ибо $102\times 2 = 204 < 235$, но $103\times 3 = 309 > 235$), её и запишем в качестве второй цифры ответа;

д) из числа 235 вычтем найденное в предыдущем пункте произведение 204 и к остатку 31 снесём следующую группу цифр 29; получим число 3129;

е) удвоив записанное в ответе число 52, припишем справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру было наибольшим, но не превосходило числа 3129 ; такой цифрой будет 3 (ибо $1043\times 2 = 3129$), её и запишем в качестве третьей цифры ответа;

ж) разность между снесённым числом 3129 и полученным в предыдущем пункте произведением равна 0, поэтому корень квадратный из числа 273529 извлекается нацело и равен записанному в ответе числу 523.

Если предложенный алгоритм в применении к данному числу не заканчивается ни на каком шаге , т.е. не наступает ситуация, описанная в вышеприведённом примере, т.е. группы из двух цифр заканчиваются, то в этом случае необходимо сносить группу из двух нулей и так всякий раз до тех пор пока мы не получим результат с наперед заданной точностью.

Отметим, что найдя какое-нибудь, приближенное значение $x>0$ корня квадратного из данного числа $a = x^2 + b$, мы можем значительно улучшить приближение с помощью формулы

$$\sqrt{x^2+b} \approx x + \frac{b}{2x}$$

и при этом погрешность $\varepsilon = (x + \frac{b}{2x}) - \sqrt{a}$ полученного приближения будет удовлетворять оценкам $0 < \varepsilon < \frac{b^2}{8x^2\sqrt{a}}$.

Аналогично поступаем с корнем кубическим из данного числа $a = x^3 + b$, для того чтобы улучшить приближение с помощью формулы

$$\sqrt[3]{x^3+b} \approx x + \frac{b}{3x^3},$$

С соответствующей погрешностью результата.

Литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : В 2 т. –М. : Высш. шк., 1981 – Т. 1-688 с.
2. И.Н.Сергеев , С.Н.Олехник, С.Б.Гашков. Примени математику. –М. : Наука , 1989,-240 с.