К вопросу об аффинной классификации кривых третьего порядка

Тимошин Михаил Иванович, доцент, к. ф-м. н.

Аннотация. *В статье уточняется доказательство теоремы об аффинной классификации кривых третьего порядка опубликованной в журнале «Школа Науки» -2018.- № 9 (9) «Группы преобразований алгебраических кривых третьего порядка».*

Ключевые слова: *алгебраические кривые, сопряженные, асимптотические направления.*

В работе [1] приводится теорема об аффинной классификации кривых третьего порядка.

Теорема. *Каждая кривая третьего порядка с помощью аффинного преобразования приводится к одной из следующих канонических форм:*

1. $(x+a)(x^2+y^2-1)+by+c=0,$
2. $(x+a)(x^2+y^2+1)+by+c=0,$
3. $(x+a)(x^2+y^2)+by+c=0,$
4. $(x+a)(x^2-y^2-1)+by+c=0,$
5. $(x+a)(x^2-y^2+1)+by+c=0,$
6. $(x+a)(x^2-y^2)+by+c=0,$
7. $(x+a)(x^2-2y)+by+c=0,$
8. $(x+a)(y^2-2x)+by+c=0,$
9. $(x+a)(y^2-1)+by+c=0,$
10. $(x+a)(y^2+1)+by+c=0,$
11. $(x+a)y^2+by+c=0,$
12. $(x+a)(x^2-1)+by+c=0,$
13. $(x+a)(x^2+1)+by+c=0,$
14. $(x+a)x^2+by+c=0,$
15. $y^2=x^3+bx+c,$

где a, b, c*- произвольные вещественные константы.*

Доказательство этой теоремы опирается на результат Ньютона [2] о том, что всякая кривая третьего порядка
$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+3Ex^2+6Fxy+3Gy^2+Hx+Iy+K=0,$
либо представляется в виде
$(b_1x+b_2y+b_0)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0)+c_1y+c_0=0,$ (1)
либо приводится к виду $y^2=ax^3+bx^2+cx+d.$

В статье [1] для приведения уравнения (1) к каноническому виду предлагается при переходе к новому базису воспользоваться направляющим вектором прямой
$b_1x+b_2y+b_0=0,$ (2)
и вектором, сопряженным к нему относительно квадратичной формы
$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$ (3)

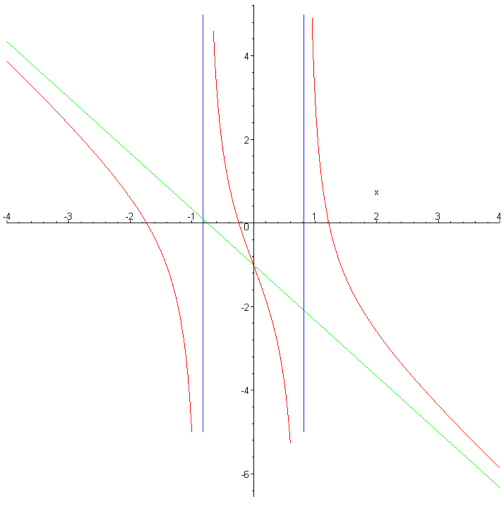
Перегруппировав слагаемые, сместив начало координат и изменив масштаб, можно получить каноническую форму кривой. Однако такой подход работает не всегда. Если направляющий вектор прямой (2) совпадает с асимптотическим направлением квадратичной формы (3), то такая процедура приведения кривой третьего порядка к каноническому виду не работает [3]. В этом случае нужно начинать приведение к каноническому виду с кривой второго порядка
$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0.$ (4)

Если квадратичная форма (3) является параболической, то новый базис строится из собственных векторов этой формы. Асимптотическое направление совпадает с направлением одного из собственных векторов. Перенеся начало координат, и изменив масштаб, получим каноническую форму. В случае гиперболической квадратичной формы потребуется взять в качестве базиса асимптотические направления квадратичной формы (3). Смещение начала координат, изменение масштаба, и перегруппировка слагаемых позволяет привести кривую третьего порядка к каноническому виду и в этом случае. ■

Пример. В работе [1] рассматривалась процедура приведения к каноническому виду на примере декартова листа
$x^3+y^3-3Fxy=0.$
Было показано, что уравнение декартова листа может быть записано в виде

$$(t^2+z^2)\left(t+\frac{3F}{2}\right)-\frac{F^3}{2}=0.$$

Рассмотрим процедуру приведения к каноническому виду в случае уравнения приведенного в [4]
$4x^3+3x^2y+3x^2-8x-2y-2=0.$ (5)
График этой кривой представлен на рисунке:



Очевидно, что уравнение (5) можно переписать в виде
$x(4x^2+3xy+3x-8)-2y-2=0.$

Направляющий вектор прямой $x = 0$ является асимптотическим направлением квадратичной формы $4x^2 + 3xy$. Определитель матрицы квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}$$

отрицателен и, следовательно, квадратичная форма гиперболическая. Асимптотические направления в рассматриваемом случае определяются уравнением

$4\alpha^2 + 3\alpha\beta = 0.$ (6)

Разрешив уравнение (6), находим асимптотические направления $\overline{e_1} = (0,1), \overline{e_2} = (-3,4)$. Воспользовавшись новым базисом и сместив начало координат в точку (a, b), перейдем к новым координатам $x = -3y' + a, y = x' + 4y' + b$. Соответствующая кривая второго порядка принимает в этом случае вид

$$4x^2 + 3xy + 3x - 8 = 0 \ \rightarrow \ -9x'y' + 3ax' - y'(12a + 9b + 9) + 3ba + 3a - 8 = 0.$$

Положив $a = 0, b = -1$, получим кривую второго порядка вида $-9x'y' - 8 = 0$. Кривая третьего порядка (5) будет определяться в новых координатах уравнением

$$27x'y'^2 - 2x' + 16y' = 0.$$

Изменив масштаб $x' = \frac{16}{27}x", y' = \sqrt{\frac{2}{27}}y"$, придем к уравнению кривой третьего порядка

$x"(y"^2 - 1) + \frac{3\sqrt{6}}{2}y" = 0,$

приведенному в теореме под девятым номером.

Литература:

1. М.И. Тимошин «Группы преобразований кривых третьего порядка»// Школа Науки -2018.- № 9 (9) С. 5-14.
2. А.С. Смогоржевский, Е.С. Столова. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Москва 1961-271с.
3. П.С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. Москва 1968-912с.
4. Л.К. Кузнецов. Сборник заданий по высшей математике. СПб.: Издательство «Лань», 2005.- 240с.