УДК 517.977.1/.5

Вывод первых вариаций в задаче оптимального управления с приближенно известными исходными данными при фазовых ограничениях

Гоберник Н. С., канд. экон. наук;
Фролагина Е. В., канд. физ.-мат. наук;
Чернова Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.
Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Введение

Хорошо известно, что изучение любой задачи оптимального управления заключается в получении необходимых и достаточных условий оптимальности. При этом вывод первых вариаций для изучаемых функционалов — есть основной этап для формулировки этих условий.

В данной статье рассмотрена задача оптимального управления с фазовыми ограничениями. Кроме того, исходные данные задачи считаются заданными приближенно. Анализ иллюстративных примеров из работ [1—3] говорит о том, что при неточно заданных известных входных данных задач оптимального управления уже в самых простых ситуациях классического понятия оптимального управления недостаточно для построения теории таких задач. Это связано, прежде всего, с тем, что в «возмущенной задаче» оптимального элемента может просто не существовать, а в случае существования не вполне понятно, какое отношение оно имеет к исходному оптимальному управлению. В этой связи предлагается в качестве «искомого» элемента теории рассматривать не классическое оптимальное управление, а минимизирующую последовательность допустимых управлений, под которой следует понимать минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги [4].

Постановка задачи

Пусть $\mathrm{U} \subset R^{\mathrm{m}}$ — компакт, $D = \{u \in L_\infty^m(0,T): u(t) \in U \text{ п.в. на } (0,1)\}$. Рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$I_0(u) \equiv \int_0^1 F\big(t, x[u](t), u(t)\big)dt \to inf \tag{1}$$

при поточечных фазовых ограничениях типа неравенства

$$I_1(u) \equiv g\big(t, x[u](t), u(t)\big) \le 0, t \in E \subset [0,1], \tag{2}$$

где E — фиксированный компакт, $x[u](t)$ — соответствующее управлению $u \in D$ абсолютно непрерывное решение задачи Коши:

$$\dot{x} = f\big(t, x[u](t), u(t)\big), x(0) = x_0, t \in [0,1], x \in R^n. \tag{3}$$

Будем считать, что выполнены следующие условия на исходные данные задачи (1) — (3):

1) векторные функции $f, \nabla_x f: [0,1] \times R^n \times R^m \to R^n$ непрерывны по совокупности (t, x, u);
2) функция $F: [0,1] \times R^n \times R^m \to R^1$ непрерывна по (t, x, u) вместе со своим градиентом по x;
3) функция $g: [0,1] \times R^n \to R^1$ непрерывна по совокупности переменных (t, x) вместе со своим градиентом по x.

Введем на множестве D метрику Экланда

$$d(u^1, u^2) \equiv meas\{t \in [0,1]: u^1(t) \ne u^2(t)\},$$

превратив его тем самым в полное метрическое пространство [5].

Согласно [4] *минимизирующим приближенным решением*, которое в дальнейшем будем называть (просто) *миимизирующей последовательностью*, в задаче (1) — (3) называется последовательность управлений $u^i \in D, i = 1,2, \ldots$, такая, что

$$I_0(u^i) \le \beta + \gamma^i, u^i \in D^{\alpha^i}, \gamma^i, \alpha^i \ge 0, \gamma^i, \alpha^i \to 0, i \to \infty, \tag{4}$$

где $D^\alpha \equiv \{u \in D: I_1(u) \le \alpha\}$, $\beta = \lim_{\alpha \to +0} \beta_\alpha \le \beta_0$, $\beta_\alpha \equiv \inf_{u \in D^\alpha} I_0(u)$, $\beta_\alpha \equiv +\infty$, если $D^\alpha = \emptyset$. При этом функцию β принято называть функцией значений задачи (1) — (3) (далее обозначим задачу (1) — (3) задачей (Р).)

Введем множество f всевозможных наборов исходных данных $\mathrm{f} \equiv \{f, F, g, \mathrm{U}\}$, для каждого из которых выполнены условия (1) — (3). Обозначим через $\mathrm{f}^\delta \equiv \{f^\delta, F^\delta, g^\delta, \mathrm{U}^\delta\}$, где $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, наборы невозмущенных ($\delta = 0$) и возмущенных ($\delta > 0$) исходных данных соответственно. Будем считать, что выполнены следующие оценки:

$$\begin{gathered} \left|f^\delta - f^0\right| \le L_M \delta \quad \forall (t, x, u) \in [0,1] \times S_M \times U, \\ \left|F^\delta - F^0\right|, \left|\nabla_x F^\delta - \nabla_x F^0\right| \le L_M \delta \quad \forall (t, x, u) \in [0,1] \times S_M \times U, \\ \chi\big(U^\delta, U^0\big) \le N\delta, \left|g^\delta - g^0\right| \le L_M \delta \quad \forall (t, x) \in [0,1] \times S_M, \end{gathered} \tag{5}$$

где $S_M \equiv \{x \in R^n: \ |x| < M\}$, L_M, N — положительные постоянные, а через $\chi(A, B)$ обозначено расстояние в смысле Хаусдорфа [4] между множествами A и B. Кроме того будем считать, что для исходной задачи (P^0) выполнены условия:

i) для любого управления $u \in D^0$ существует единственное решение $x^0[u]$ задачи (3), причем $|x^0[u](t)| \le C_0 \ \forall t \in [0,1], \forall u \in D^0$;

ii) функция f^0 удовлетворяет условию

$$|f^0(t,x,v) - f^0(t,x,u)| \le G_M|v-u| \; \forall (t,x,u) \in [0,1] \times S_M \times U^0,$$

где $G_M > 0$, зависящая от $M > 0$ постоянная;

iii) $|g^0|, |\nabla_x g^0| \le K_M \; \forall (t,x) \in [0,1] \times S_M$, где K_M − зависящая от $M > 0$ постоянная.

Вывод первых вариаций

Пусть $u_s, s = 1,2,\dots$, есть минимизирующее приближенное решение в задаче (1), (2), тогда эта последовательность так же является минимизирующей в задаче

$$J(u) \equiv \max_{u\in D}\{I_0(u) - \beta, g(t, x[u](t)), t \in [0,1]\} \to inf, \tag{6}$$

причем

$$J(u^s) \le \inf_{u\in D} J(u) + \alpha^s, \alpha^s \ge 0, \alpha^s \to 0, s \to \infty\,. \tag{7}$$

В силу (7) применяем к функционалу J вариационный принцип Экланда, тогда можно указать такую минимизирующую последовательность $\omega^s \in D$, которая доставляет решение в задаче

$$J^s(u) \equiv J(u) + \sqrt{\alpha}d(u,\omega^s) \to inf \in D \tag{8}$$

и удовлетворяющее неравенствам

$$d(u^s,\omega^s) \le \sqrt{\alpha^s}\,, J(\omega^s) \le J(u^s). \tag{9}$$

Пусть далее, $\hat{E}_k = \{t^1, t^2, \dots, t^{l_k}\}$ − конечная $\frac{1}{k}$ − сеть компакта E. Рассмотрим семейство вспомогательных задач минимизации, аппроксимирующих задачу (8)

$$J^{s,k}(u) \equiv \max_{u\in D}\{I_0(u) - \beta, I_j^k(u), j = 1,2,\dots,l_k\} + \sqrt{\alpha^s}d(u,\omega^s) \to inf,$$
$$u \in D, k = 1,2,\dots,$$

где функционал $I_j^k \equiv g\left(t^{k,j}, x[u](t^{k,j})\right)$.

Можно утверждать, что имеет место равенство

$$\inf_{u\in D} J^{s,k}(u) \to \inf_{u\in D} J^s(u) = J^s(\omega^s) = J(\omega^s), k \to \infty. \tag{10}$$

Действительно, с одной стороны

$$\lim_{k\to\infty} \sup \inf_{u\in D} J^{s,k}(u) \le J^s(\omega^s). \tag{11}$$

Предположим, с другой стороны, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \sup \inf_{u\in D} J^{s,k}(u) \le -\varepsilon + J^s(\omega^s). \tag{12}$$

Тогда существует последовательность управлений $v^k \in D, k = 1,2,\dots$, такая, что

$$J^{s,k}(v^k) \le -\frac{\varepsilon}{2} + J(\omega^s), k = 1,2,\dots \tag{13}$$

Из (13) в силу равномерной ограниченности и равномерной непрерывности семейства решений $\{x[u], u \in D\}$ следует, что существует номер k_0 такой, что

$$J(v^{k_0}) + \sqrt{\alpha^s}d(v^{k_0},\omega^s\,) \le -\frac{\varepsilon}{4} + J(\omega^s).$$

Последнее неравенство противоречит оптимальности управления ω^s и, следовательно, (12) не может иметь места, откуда в совокупности с (11) и вытекает справедливость (10).

В силу (10) имеем

$$J^{s,k}(\omega^s) \le \inf_{u\in D} J^{s,k}(u) + \gamma^k, \gamma^k \ge 0, \gamma^k \ge 0, \gamma^k \to 0, k \to 0$$

и, значит, можем применить вариационный принцип Экланда еще раз, но теперь уже к функционалу $J^{s,k}(\cdot)$. Получаем управление $\omega^{s,k} \in D$, дающее решение в задаче

$$J^{s,k}(u) + \sqrt{\gamma^k}d(u,\omega^s) = J(\omega^{s,k}) \to inf, \qquad u \in D, \tag{14}$$

и удовлетворяющее неравенствам

$$d(\omega^s,\omega^{s,k}) \le \sqrt{\gamma^k}, \qquad J(\omega^{s,k}) \le J(\omega^s). \tag{15}$$

Таким образом, имеем минимизирующую последовательность $\omega^{s,k} \in D$, которая минимизирует функционал

$$\hat{J}^{s,k}(u) = J^{s,k}(u) + \sqrt{\gamma^k}d(\omega^s\,,\omega^{s,k}),$$
$$\hat{J}^{s,k}(u) = \max_{u\in D}\{I_0(u) - \beta, I_j^k(u), j = 1,\dots,l_k, k = 1,2.\} \;\; + \sqrt{\alpha^s}d(u,\omega^s) + \sqrt{\gamma^k}d(\omega^s,\omega^{s,k}).$$

Далее определим многоточечную импульсную вариацию $\omega^{s,k,\varepsilon}$ управления $\omega^{s,k} \in D$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Пусть U^* − счетное всюду плотное подмножество множества $U (U^* = U$, если U − счетно или конечно). Тогда

$$\omega^{s,k,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \omega^{s,k}(t), \qquad t \in [0,1] \setminus \bigcup_{ij} \Pi_{ij}^\varepsilon \\ \omega^{ij} \in U^*, t \in \Pi_{ij}^\varepsilon, i = 1,\dots,i_1, j = 1,\dots,j_i, \end{cases} \tag{16}$$

где $\Pi_{ij}^\varepsilon \equiv \{t \in [0,1]: \tau^i - \varepsilon\sum_{m=1}^{j}\gamma^{im} < t \le \tau^i - \varepsilon\sum_{m=1}^{j-1}\gamma^{im}\}$, $\tau^i \in [0,1]$, $i = 1,\dots,i_1$ − набор точек Лебега функций $f(t,x[u](t),u(t))$, $F_0(t,x[u](t),u(t))$, $t \in [0,T]$; $\gamma^{ij}, i = 1 j = 1, j = 1,\dots,j_i$ − набор неотрицательных чисел такой, что $\sum_{i,j}\gamma^{ij} \le 1$; $\omega^{ij} \in U^*$, $i = 1,..,i_1$, $j = 1,\dots,j_i$ − набор векторов; ε_0 - достаточно малое число, зависящее от наборов γ^{ij}, t^i, такое, что множества $\Pi_i^\varepsilon \equiv \{\tau^i - \varepsilon\sum_{m=1}^{j_i}\gamma^{im}, \tau^i\}$ попарно не пересекаются.

Можно показать ([6]), что

$$\|x[\omega^{s,k,\varepsilon}] - x[\omega^{s,k}]\|_{C_n[0,1]} \to 0, \varepsilon \to 0. \qquad (17)$$

Обозначим через M множество всех конечных наборов $m = \{\tau^i, \gamma^{ij}, \omega^{ij}, i = 1, \dots, i_1, j = 1, \dots, j_i\}$, где $\tau^i, \gamma^{ij}, \omega^{ij}$ удовлетворяют перечисленным выше условиям.

Введем следующие обозначения:

$$J_0(u) \equiv I_0(u) - I_0(u_0), J_s \equiv g(t^s, x[u](t^s)), s = 1, \dots, l_k.$$

Перейдем к вычислению первых вариаций функционалов $J_s(u), s = 0,1, \dots, l_k$.

Распишем приращение:

$$\Delta_\varepsilon J_0 = I_0(\omega^{sk\varepsilon}) - I_0(\omega^{sk}) = \int_0^1 \langle \int_0^1 \nabla_x F_0\big(t, x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x, \omega^{sk\varepsilon}(t)\big) d\gamma \Delta x(t)\rangle\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \Delta_u F_0(x[\omega^{sk}](t); \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t))dt \equiv \langle \Delta x(t), \int_t^1 \left\{ \int_0^1 \nabla_x F_0\big(t, x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x(t), \omega^{sk\varepsilon}(t)\big)d\gamma \right\} dt\rangle \Big|_0^1 + \qquad (18)$$

$$+ \int_0^1 \langle \int_t^1 \left\{ \int_0^1 \nabla_x F_0\big(t, x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x(t), \omega^{sk\varepsilon}(t)\big)d\gamma \right\} dt, \Delta\dot{x}(t)\rangle\, dt + \int_0^1 \Delta_u F_0(x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t))dt,$$

где $\Delta x(t) = x[\omega^{sk\varepsilon}](t) - x[\omega^{sk}](t)$,

$$\Delta_u F_0\big(x[\omega^{sk}](t); \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t)\big) = F_0\big(t, x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk\varepsilon}(t)\big) - F_0\big(t, x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk}(t)\big)$$

Одновременно для всех $t \in [0,1]$ можем записать

$$\Delta\dot{x}(t) = \dot{x}[\omega^{sk\varepsilon}](t) - \dot{x}[\omega^{sk}](t) =$$

$$= \langle \int_0^1 \nabla_x f\big(t, x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x(t), \omega^{sk\varepsilon}(t)\big)d\gamma, \Delta x(t)\rangle + \Delta_u f\big(x[\omega^{sk}](t); \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t)\big). \qquad (19)$$

Далее нам понадобится следующая лемма (см, например, [6]).

Лемма 1. Пусть задана линейная система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), x(0) = 0,$$

где $A(t) -$ $(n \times n)$ $-$ матрица с компонентами из $L_{\infty,1}[0,1]$, $b \in L_{2,n}[0,1]$. Тогда, если $x_0(t), 0 \le t \le 1 -$ решение системы, то для любой функции $a \in L_{2,n}[0,1]$ выполняется равенство

$$\int_0^1 (\dot{x}_0(t), a(t))dt = \int_0^1 (\psi(t), b(t))dt,$$

где функция $\psi(t), 0 \le t \le 1$ $-$ решение системы

$$\psi(t) - \int_t^1 A^*(t)\psi(t)dt = a(t).$$

Тогда в силу леммы 1 имеем

$$I_0(\omega^{sk\varepsilon}) - I_0(\omega^{sk}) = \int_0^1 \langle \eta_0[\omega^{sk\varepsilon}](t), \Delta_u f_0\big(x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t)\big)\rangle dt +$$
$$+ \int_0^1 \Delta_u F_0(x[\omega^{sk}(t)]; \omega^{sk\varepsilon}(t), \omega^{sk}(t))dt, \qquad (20)$$

где $\eta_0[\omega^{sk\varepsilon}](t), t \in [0,1]$ $-$ решение системы

$$\eta_0[\omega^{sk\varepsilon}(t)] - \int_t^1 \langle \int_0^1 \nabla_x^* f_0\big(x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x(t), \omega^{sk\varepsilon}(t)\big)d\gamma, \eta_0[\omega^{sk\varepsilon}](t)\rangle\, dt =$$
$$= \int_t^1 \left\{ \int_0^1 \nabla_x F_0(t, x[\omega^{sk}](t) + \gamma\Delta x(t), \omega^{sk\varepsilon}(t))d\gamma \right\} dt.$$

Зафиксируем произвольный конечный набор $m \in M$. С учетом определения вариации $\omega^{sk\varepsilon}(t)$ из (16) имеем

$$I_0(\omega^{sk\varepsilon}) - I_0(\omega^{sk}) = \sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_i} \left\{ \int_{\Pi_{ij}^\varepsilon} \langle \eta_0[\omega^{sk\varepsilon}](t), \Delta_u f(x[\omega^{sk}](t); \omega^{ij}, \omega^{sk}(t))\rangle\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{\Pi_{ij}^\varepsilon} \Delta_u F_0(x[\omega^{sk}(t)]; \omega^{ij}(t), \omega^{sk}(t))dt \right\}. \qquad (21)$$

Далее нам понадобится следующее утверждение ([6]).

Лемма 2. Справедливо предельное соотношение

$$\|\eta_0[\omega^{sk\varepsilon}] - \eta_0[\omega^{sk}]\|_{C_n[0,1]} \to 0, \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Перейдем к выводу первых вариаций функционалов. Рассмотрим соотношение (21). Для получения первой вариации для функционала I_0, разделим выражение (21) на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Применяя к первому и второму слагаемому теорему Лебега, получаем:

$$\delta J_0 \equiv \delta I_0(\omega^{sk}; m) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(I_0(\omega^{sk\varepsilon}) - I_0(\omega^{sk})\right) = \\ = \sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^{ij}[\langle\eta_0[\omega^{sk}](\tau^i), \Delta_u f\left(x[\omega^{sk}](\tau^i); \omega^{ij}, \omega^{sk}\left((\tau^i)\right)\right], \tag{22}$$

для любого $m \in M$, где $\eta_0[\omega^{sk}](t), t \in [0,1], -$ решение системы

$$\eta_0[\omega^{sk}](t) - \int_t^1 \nabla_x^* f\left(t, x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk}(t)\right)\eta_0[\omega^{sk}](t)dt = \int_t^1 \nabla_x F_0(t, x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk}(t))dt. \tag{23}$$

Аналогично получаем первую вариацию для функционала $J_s, s = 1, \dots, l_k$:

$$\delta J_s(\omega^{sk}; m) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(J_s(\omega^{sk\varepsilon}) - J_s(\omega^{sk})\right)\right\} = \sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^{ij}\langle\eta^k[\omega^{sk}](\tau^i, t^l), \Delta_u f(x[\omega^{sk}](\tau^i); \omega^{ij}, \omega^{sk}(\tau^i))\rangle, \tag{24}$$

для любого $m \in M$, где $\eta^k[\omega^{sk}](\tau^i, t^l), t \in [0,1], -$ решение системы

$$\eta^k[\omega^{sk}](t, t^l) - \int_t^1 \nabla_x^* f\left(t, x[\omega^{sk}](t), \omega^{sk}(t)\right)\eta^k[\omega^{sk}](t, t^l)dt = a(t, t^l), \tag{25}$$

где

$$a(t, t^l) \equiv \left\{\nabla_x g\left(t^l, x[\omega^{sk}](t^l)\right), 0 \le t \le t^l; t^l < t \le 1\right\}, 0 \le t^l \le 1.$$

Вывод

Таким образом, получены первые вариации функционалов для исходной задачи (формулы (22), (24)). Вывод первых вариаций позволит в дальнейшем перейти к следующему этапу построения теории оптимального управления для задачи с фазовыми ограничениями в случае приближенно известных исходных данных – получению необходимых и достаточных условий оптимальности.

Литература:

1. Фролагина, Е. В. Параметрические задачи оптимального управления с приближенно известными исходными данными / Автореф. канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 2009. – 38 с.
2. Сумин, М. И. О регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина / Е. В. Трушина // Изв. вузов. Математика. 2008. № 1. – С. 63 – 77.
3. Сумин, М. И. Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными и регуляризирующие свойства принципа максимума / Е. В. Трушина // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 2. – С. 220 – 236.
4. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 213 с.
5. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1981. – 280 с.
6. Плотников, В. И. Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления / М. И. Сумин // Матем. заметки. 1982. Т.32. № 8. – С. 187 – 197.