УДК 511.48

Алгоритмическое доказательство теоремы Ферма, через частичное решение 10-й проблемы Гильберта.

Паршаков Дмитрий Васильевич, мастер
ООО «ЭММ»

Аннотация. *Я не профессиональный математик, а просто любитель. Заняться доказательством теоремы Ферма меня подтолкнул короткометражный фильм «Математик и черт». (СССР. 1972г. Режиссер: Райтбург.) Математик предлагает продать свою душу дьяволу за доказательство теоремы Ферма. Но даже черт не смог этого сделать.*

Ключевые слова: *Пифагоровы тройки, 10-я проблема Гильберта, алгоритм.*

Parshakov Dmitry Vasilievich, master
LLC "EMM"

Annotation. *I am not a professional mathematician, but just an amateur. I was pushed to prove the Fermat's theorem by the short film “Mathematician and the Devil”. (USSR. 1972. Director: Reitburg.) Mathematician proposes to sell his soul to the devil for proving Fermat's theorem. But even the devil could not do it.*

Keywords: *Pythagorean triples, 10th Hilbert problem, algorithm.*

Введение. В 1900г. на 1 Международном математическом конгрессе, известный математик Давид Гильберт поставил перед математиками всего мира 23 задачи. Эти задачи принято называть "Проблемами Гильберта".

Решением десятой проблемы Гильберта стало признание ее неразрешимости, доказанное советским математиком [1] Ю.В.Матясевичем в 1970г.

Доказательство неразрешимости Матиясевича признано как единственно допустимое, но возможно это не так.

Итак, для того, чтобы опровергнуть, либо подтвердить это доказательство нужно вначале напомнить задачу, определенную Д.Гильбертом в 10-й проблеме.

«Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах»

Решение. То есть нужно найти некий алгоритм, при помощи которого возможно находить натуральные (целочисленные) значения для произвольных неизвестных.

Самое известное уравнение Диофанта это формула Пифагора.

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Известны также так называемые «тройки Пифагора», целочисленные значения для неизвестных «a,b,c»

3,4,5; 5,12,13; 7,24,25 и т.д. Эти тройки имеют два сходства: первое - квадрат первого (наименьшего) числа равен сумме двух других чисел, второе – разница между вторым и третьим числом равна 1. Следовательно, можно предположить, что это не случайные совпадения. Исходя из этого, составим равенства

$$a^2 = b + c \qquad b = c - 1 \qquad a^2 = 2c - 1 \qquad a^2 = 2b + 1$$

Теперь, используя все эти формулы, составим уравнения

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

Подставим эти уравнения в формулу Пифагора

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

$$a^2 + \frac{a^4}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$a^2 = a^2$$

Получилось равенство значений правой и левой сторон уравнения. Это можно считать доказательством существования алгоритма нахождения натуральных значений «пифагоровых троек». Но эти формулы диофантовы лишь для нечетных чисел, хотя при постановке в формулы четных чисел для «a» также можно найти значения двух других чисел «b,c», эти значения будут рациональными, но не целыми числами.

Например «a»=8

$8^2+\left(\frac{8^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{8^2+1}{2}\right)^2$ $64+\left(\frac{64-1}{2}\right)^2=\left(\frac{64+1}{2}\right)$ $64+31{,}5^2=32{,}5^2$ $64+992{,}25=1056{,}25$ $1056{,}25=1056{,}25$

Используя этот алгоритм можно составить перечислимое множество для каждого неизвестного, что также является подтверждением решения 10 проблемы Гильберта

$$a_1=1\to a_2=a_1+1\to a_3=a_2+1\to\ldots a_n=a_{n-1}+1$$

$$b_1=0\to b_2=b_1+1.5\to b_3=b_2+2.5\to\ldots b_n=b_{n-1}+n+0.5$$

$$c_1=1\to c_2=c_1+1.5\to c_3=c_2+2.5\to\ldots c_n=c_{n-1}+n+0.5$$

Также, применяя этот алгоритм, можно находить соответствующие значения «троек» для любых рациональных чисел, даже не натуральных. Например: a=2,5

$$2.5^2+\left(\frac{2.5^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{2.5+1^2}{2}\right)^2$$

$$6.25+\left(\frac{6.25-1}{2}\right)^2=\left(\frac{6.25+1}{2}\right)^2$$

$$6.25+2.625^2=3.625^2 \qquad 6.25+6.890625=13.140625 \quad 13.140625=13.140625$$

Этот алгоритм позволяет находить значения даже для некоторых иррациональных чисел, а именно для квадратных корней. Например: для $\sqrt{5}$

$$\sqrt{5}^2+\left(\frac{\sqrt{5}^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}^2+1}{2}\right)^2 \quad 5+\left(\frac{5-1}{2}\right)^2=\left(\frac{5+1}{2}\right)^2 \quad 5+2^2=3^2 \quad 5+4=9$$

Во всех этих примерах сохраняется условие

$$c-b=1$$

Итак: алгоритм нахождения пифагоровых троек

$$a^2+b^2=c^2$$

при

$$b=\frac{a^2-1}{2} \qquad c=\frac{a^2+1}{2}$$

можно считать универсальным для всех рациональных и некоторых иррациональных чисел.

Но этот алгоритм нахождения «троек» является первичным для взаимно простых чисел, так как существует формула кратности этого уравнения

$$(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$$

Возьмем пример при «a»=2.5 с «n»=8

$$a\to 2.5\times 8=20$$

$$b\to 2.625\times 8=21$$

$$c\to 3.625\times 8=29$$

Разница между числами «b» и «c» соответствует коэффициенту «n».

Постановка вопроса о разрешимости диофантовых уравнений подразумевала также доказательство теоремы Ферма. Почему же не может существовать целочисленные значения для уравнения

$$a^n+b^n=c^n \quad \text{при} \quad n\geq 3$$

Чтобы это доказать требуется это уравнение привести в квадратное уравнение

$$a^2\times a^{n-2}+b^2\times b^{n-2}=c^2\times c^{n-2}$$

Получилось уравнение, где неизвестные имеют разные коэффициенты. Упростим уравнение

$$a^2\left(\frac{a^{n-2}}{c^{n-2}}\right)+b^2\left(\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}\right)=c^2$$

Теперь можно применить алгоритм нахождения «пифагоровых троек». То есть для получения целочисленного значения для каждого неизвестного необходимо соблюдения условия первичного алгоритма

$$c - b = 1$$

Поэтому, должно выполняться равенство

$$c - b\sqrt{\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}} = 1$$

А так как соотношение

$$\sqrt{\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}} < 1$$

То следевательно

$$c - b < 1$$

что противоречит условиям теоремы и является доказательством того, что для уравнения

$a^n + b^n = c^n$ при $n \geq 3$

Целочисленных, а также рациональных решений не существует.

Что и требовалось доказать.

Литература:

[1] Матиясевич, Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // Доклады Академии наук СССР. – 1970. – Т. 191, № 2. – С. 279–282.

Макарычева А.Г. Алгебра 8 кл.

Бескровный И.М. Системный анализ пифагоровых троек.