УДК 517.95

Минимизирующие последовательности и конечно-разностная аппроксимация в задаче оптимального управления с приближенно известными исходными данными

Фролагина Е.В.
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Излагаются результаты, связанные с теорией оптимального управления системами с приближенно известными исходными данными. Основным элементом предложенной теории является минимизирующее приближенной решение в смысле Варги (минимизирующая последовательность). Устанавливается связь конечно-разностной аппроксимации задачи оптимального управления и минимизирующих последовательностей.

Ключевые слова: *задача оптимального управления, приближенно известные исходные данные, минимизирующая последовательность, конечно-разностная аппроксимация.*

Введение

Потребности многочисленных приложений неизбежно приводят к изучению задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными (исходные данные могут содержать поставляемые экспериментом функции, физические константы и т.п.). Однако в абсолютном большинстве работ, посвященных теории необходимых и достаточных условий в оптимальном управлении, рассматривались задачи, исходные данные которых подразумевались точно известными.

Трудности, возникающие при изучении задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными, связаны, прежде всего, с тем обстоятельством, что само понятие оптимального управления в значительной степени "теряет смысл", так как в "возмущенной задаче" оптимального элемента может и не существовать, а в случае существования не вполне понятно, какое "отношение" оно имеет к исходному оптимальному правлению невозмущенной задачи.

Рассмотрим простейший иллюстративный пример.

Пример.

$$\int_0^1 \left(x^2(t) - u^2(t)\right)dt \to \min, \ \int_0^1 x^2(t)\,dt = 0,$$

где $x(t)$ - решение задачи Коши: $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = 0$, $t \in [0,1]$, $u(t) \in [-1,1]$. Оптимальным управлением здесь является $u_0(t) \equiv 0$, а нижняя грань задачи равна нулю.

Пусть возмущенная задача имеет вид

$$\int_0^1 \left(x^2(t) - u^2(t)\right)dt \to \min, \ \int_0^1 x^2(t)\,dt = \delta, \ \delta > 0.$$

Можно показать, что оптимальным управлением в возмущенной задаче при всех достаточно малых $\delta > 0$ существует и имеет вид функции, принимающей значения ± 1 с учащающимися переключениями при $\delta \to 0$. При этом очевидно, что такие управления не сходятся в метрике L_p при любом $p \in [1, +\infty]$ к оптимальному в невозмущенной задаче. Более того, как известно [1], нижняя грань возмущенной задачи стремится к значению -1, которое не совпадает с нижней гранью исходной задачи.

Анализ данного примера и анализ других простейших примеров [2-5] показывает, что при неточно известных исходных данных понятия классического оптимального управления не достаточно для построения содержательной теории решения таких задач. Ситуация кардинально меняется, если в качестве "искомого элемента" теории рассматривать минимизирующую последовательность допустимых управлений, под которой понимают так называемое минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги [1].

В работах [2-5] базовым элементом является минимизирующее приближенное решение [1], которое ниже будем называть для удобства просто минимизирующей (неклассической) последовательностью. Здесь были получены необходимые и достаточные условия на элементы минимизирующей последовательности, изучены регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с приближенно известными исходными данными.

Основываясь на понятие минимизирующей последовательности, можно с единых позиций рассматривать как задачи, для которых их возмущенные аналоги не имеют классических решений, так и задачи, разрешенные в классическом смысле. Использование минимизирующих последовательностей оправдано также и потому, что они всегда существуют, удобны с прикладной точки зрения (см., например, [1]), несут в себе регулязирующее начало, и именно они существенно используются в теории регуляризации некорректных задач и численных методов оптимального управления.

Кроме того, переход к минимизирующим последовательностям (то есть переход на секвенциальный язык) позволяет получить более общие формулировки в старых теоремах и получаемые при этом результаты становятся эффективнее при решении практических задач (см., например, [7]).

В настоящей статье устанавливается связь минимизирующих последовательностей и конечно-разностной аппроксимации задачи оптимального управления.

Постановка задачи

Пусть $U \subset R^m$ - компакт, $D \equiv \{u \in L_\infty(0,T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0,T)\}$. Рассмотрим семейство задач, зависящих от векторного параметра $(p,q) \in R^k \times R^l$, $p = (p_1,...., p_k) \in R^k$, $q = (q_1,..., q_l) \in R^l$, с фиксированным временем $T > 0$:

$$I_0(u) \to \inf,\ I_1(u) \le p,\ I_2(u) = q,\ u \in D,\ p \in R^k,\ q \in R^l, \qquad (P_{p,q})$$

где $I_1(u) = (I_{1,1}(u),..., I_{1,k}(u))$, $I_2(u) = (I_{2,1}(u),..., I_{2,k}(u))$,

$$I_i(u) \equiv \int_0^T F_i(t, x[u](t), u(t))dt + G_i(x[u](T)),\ i = 0, 1, 2,$$

$$F_1(t,x,u) \equiv (F_{1,1}(t,x,u),..., F_{1,k}(t,x,u)),\ F_2(t,x,u) \equiv (F_{2,1}(t,x,u),..., F_{2,l}(t,x,u)),$$

$$G_1(x) \equiv (G_{1,1}(x),..., G_{1,k}(x)),\ G_2(x) \equiv (G_{2,1}(x),..., G_{2,l}(x)),$$

$x[u]$ - соответствующее управлению $u \in D$ абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ x(0) = a,\ t \in [0,T]. \qquad (1)$$

Будем считать, что выполнены следующие условия на исходные данные задачи $(P_{p,q})$.

Условие А). Функциональные матрицы $A : [0,T] \to R^{n\times n}$, $B : [0,T] \to R^{n\times m}$, $t \in [0,T]$ непрерывны; функции $F_0 : [0,T]\times R^n \times R^m \to R^1$, $G_0 : R^n \to R^1$, векторные функции $F_1 : [0,T]\times R^n \times R^m \to R^k$, $G_1 : R^n \to R^k$, $F_2 : [0,T]\times R^n \times R^m \to R^l$, $G_2 : R^n \to R^l$ непрерывны по (t,x,u) вместе со своими градиентами и якобианами по x соответственно.

Согласно [1], минимизирующим приближенным решением (минимизирующей последовательностью) в задаче $(P_{p,q})$ называется последовательность $u^i \in D$, $i = 0, 1, 2,...$, такая, что

$$I_0(u^i) \le \beta(p,q) + \rho^i,\ u^i \in D_{p,q}^{\gamma^i},\ \rho^i, \gamma^i > 0,\ \ \rho^i, \gamma^i \to 0,\ \ i \to \infty, \qquad (2)$$

где

$$D_{p,q}^{\gamma} \equiv \{u \in D : I_{1,j}(u) \le p_j + \gamma,\ j = 1,..., k, \left|I_{2,j}(u) - q_j\right| \le \gamma,\ j = 1,..., l\},$$

$$\beta \equiv \lim_{\gamma\to+0} \beta_\gamma \le \beta_0,\ \beta_\gamma \equiv \inf_{u\in D^\gamma} I_0(u),\ \beta_\gamma \equiv +\infty, \text{ если } D_{p,q}^{\gamma} = \varnothing.$$

При этом функцию $\beta : R^k \times R^l \to R^1 \cup \{+\infty\}$ принято называть функцией значений задачи $(P_{p,q})$.

Введем множество f всевозможных наборов исходных данных: $f \equiv \{A, B, F_0, F_1, F_2, G_0, G_1, G_2, U\}$, для каждого из которых выполняются условие А). Обозначим через $f^\delta \equiv \{A^\delta, B^\delta, F_0^\delta, F_1^\delta, F_2^\delta, G_0^\delta, G_1^\delta, G_2^\delta, U^\delta\}$, где $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, - некоторое число, наборы невозмущенных ($\delta_0 = 0$) и возмущенных ($\delta_0 > 0$) исходных данных соответственно. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\left|A^\delta(t) - A^0(t)\right| \le K\delta,\ \left|B^\delta(t) - B^0(t)\right| \le K\delta\ \ \forall t \in [0,T],$$

$$\left|F_i^\delta - F_i^0\right|, \left|\nabla_x F_i^\delta - \nabla_x F_i^0\right| \le L_M\delta\ \ \forall (t,x,u) \in [0,T]\times S_M \times U,\ i = 0, 1, 2,$$

$$\left|G_i^\delta(x) - G_i^0(x)\right|, \left|\nabla_x G_i^\delta(x) - \nabla_x G_i^0(x)\right| \le L_M\delta\ \ \forall x \in S_M,\ i = 0, 1, 2,\ \ \chi(U^\delta, U^0) \le N\delta,$$

где $S_M \equiv \{x \in R^n : |x| < M\}$, L_M, N - положительные постоянные, а через $\chi(V,W)$ обозначено расстояние в смысле Хаусдорфа (напр., [1], с.171) между множествами V, W.

Будем считать, что индекс δ в выражениях $x^\delta[u]$, I_0^δ, I_1^δ, I_2^δ, D^δ, $D_{p,q}^{\gamma,\delta}$, $\beta^\delta(p,q)$, $(P_{p,q}^\delta)$ означает, что решение $x[u]$, функционал I_0, векторные функционалы I_1, I_2, множества D, $D_{p,q}^\gamma$, функция значений $\beta(p,q)$, задача $(P_{p,q})$ соответствуют набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$.

Конечно-разностная аппроксимация и минимизирующие последовательности

Минимизирующие в смысле [1] последовательности неизбежно возникают каждый раз, когда задача $\left(P_{p,q}\right)$ (а также и любая другая более общая оптимизационная задача) решается численным образом. При этом для решения задач Коши (начально-краевых задач в более сложных случаях распределенных систем) могут применяться разнообразные конкретные численные методы. Рассмотрим ситуацию, когда задача Коши (1) решается при помощи конечно-разностной аппроксимации. При этом будет удобно использовать результаты и обозначения [6].

Пусть задано семейство конечномерных задач оптимизации, аппроксимирующих задачу $\left(P_{p,q}\right)$

$$I_0^N([u]_N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_0\left(t_i, x_i([u]_N), u_i\right) + G_0\left(x_N[u]_N\right) \to \min, \qquad \left(P_{p,q}^N\right)$$

$$[u]_N \in U_N \equiv \left\{(u_0, \ldots, u_{N-1}) \in R^N : u_i \in U,\ i = 0, \ldots, N-1\right\},$$

$$I_{1,j}^N([u]_N) \leq p_j + \gamma_N,\ j = 1, \ldots, k,\ \left|I_{2,s}^N([u]_N) - q_s\right| \leq \gamma_N,\ s = 1, \ldots, l,\ p \in R^k,\ q \in R^l,$$

$$I_{1,j}^N([u]_N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_{1,j}\left(t_i, x_i([u]_N), u_i\right) + G_{1,j}\left(x_N[u]_N\right),\ j = 1, \ldots, k,$$

$$I_{2,s}^N([u]_N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_{2,s}\left(t_i, x_i([u]_N), u_i\right) + G_{2,s}\left(x_N[u]_N\right),\ s = 1, \ldots, l,$$

$$I_1^N([u]_N) = \left(I_{1,1}^N([u]_N), \ldots, I_{1,k}^N([u]_N)\right),\ I_2^N([u]_N) = \left(I_{2,1}^N([u]_N), \ldots, I_{2,l}^N([u]_N)\right),$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t_i\left(A_i x_i + B_i u_i\right),\ x_0 = a, \tag{3}$$

$$\Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i,\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T,$$

$A_i \equiv A(t_i)$, $B_i \equiv B(t_i)$, $[x([u]_N)] \equiv \left(x_0([u]_N), \ldots, x_N([u]_N)\right)$ - решение дискретной задачи Коши (3), отвечающее дискретному управлению $[u]_N$. Введем обозначения: $I_0^{N_*}$ - нижняя грань в задаче $\left(P_{p,q}^N\right)$, а $\left[x^\delta([u]_N)\right] \equiv \left(x_0^\delta([u]_N), \ldots, x_1^\delta([u]_N)\right)$ - решение дискретной задачи, отвечающее исходным данным f^δ при $\delta \geq 0$. Можно утверждать (см. [6]), что при всех $\delta \in [0, \delta_0]$ справедлива оценка

$$\left|\left[x^\delta([u]_N)\right] - \left[x^0([u]_N)\right]\right| \leq C\delta \quad \forall [u]_N \in U_N, \tag{4}$$

причем постоянная $C > 0$ в ней не зависит от δ, $[u]_N \in U_N$, N.

Введем, как и в [6, с.298] операторы $Q_N : L_2^m[0,T] \to L_2 N^m$ и $P_N : L_2^m N^m \to L_2^m[0,T]$ (пространство дискретных функций управлений $[u_N]$ введено в [6, с.293]) по формулам

$$Q_N(u) = (u_0, \ldots, u_{N-1}),\ u_i \equiv \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t)dt,\ i = 0, \ldots, N-1,$$

$$P_N([u]_N) = u_i,\ t_i < t \leq t_{i+1},\ i = 0, \ldots, N-1.$$

Справедливы оценки [6, с.300]

$$\sup_{[u]_N \in U_N} \max_{0 \leq i \leq N} \left|x[P_N([u]_N)](t_i) - x_i([u]_N)\right| \leq \mu_N, \tag{5}$$

$$\sup_{u \in D} \max_{0 \leq i \leq N} \left|x[u](t_i) - x_i(Q_N(u))\right| \leq \mu_N, \tag{6}$$

в которых величин $\mu_N \to 0$, $N \to \infty$, определена в [6, с.300].

Можно утверждать также, что в сиу этих двух оценок (5), (6) при выполнении условия $2\mu_N \leq \gamma_N$, справедливо предельное соотношение

$$I_0^{N_*} \to \beta(p,q),\ N \to \infty. \tag{7}$$

Рассмотрим далее величины

$$I_0^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_0^{\delta_N}\left(t_i, x_i^{\delta_N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right), u_i^{\varepsilon_N}\right) + G_0^{\delta_N}\left(x_N^{\delta_N}[u]_N^{\varepsilon_N}\right),$$

$$I_1^{\delta_N,N}\left([u]_N^{\delta_N}\right) = \left(I_{1,1}^{\delta_N,N}([u]_N^{\varepsilon_N}), \ldots, I_{1,k}^{\delta_N,N}([u]_N^{\varepsilon_N})\right),\ I_1^{\delta_N,N}\left([u]_N^{\delta_N}\right) = \left(I_{2,1}^{\delta_N,N}([u]_N^{\varepsilon_N}), \ldots, I_{2,s}^{\delta_N,N}([u]_N^{\varepsilon_N})\right)$$

$$I_{1,j}^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_{1,j}^{\delta_N}\left(t_i, x_i^{\delta_N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right), u_i^{\varepsilon_N}\right) + G_{1,j}^{\delta_N}\left(x_N^{\delta_N}[u]_N^{\varepsilon_N}\right),\ j = 1,\dots,k,$$

$$I_{2,s}^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_{2,s}^{\delta_N}\left(t_i, x_i^{\delta_N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right), u_i^{\varepsilon_N}\right) + G_{2,s}^{\delta_N}\left(x_N^{\delta_N}[u]_N^{\varepsilon_N}\right),\ s = 1,\dots,l,$$

где дискретное управление $[u]_N^{\varepsilon_N} = \left(u_0^{\varepsilon_N},\dots,u_{N-1}^{\varepsilon_N}\right): u_i^{\varepsilon_N} \in U$, такое, что

$$I_0^{N_*} \le I_0^N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) \le I_0^{N_*} + \varepsilon_N,$$

где $\varepsilon_N \ge 0$, $\varepsilon_N \to 0$, $N \to \infty$.

Покажем, что последовательность $P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)$ является минимизирующей в смысле (2) в задаче $\left(P_{p,q}\right)$.

В силу оценки (4) и условия А) можем утверждать, во-первых,

$$\left|I_0^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) - I_0^{0N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right| \le \alpha_N^1,\quad \alpha_N^1 \to 0,\quad N \to \infty. \tag{8}$$

Во-вторых, в силу оценки (5) и опять же условия А) можем записать

$$\left|G_0^0\left(x_N^0[u]_N^{\varepsilon_N}\right) - G_0^0\left(x^0[P_N([u]_N^{\varepsilon_N})](t_N)\right)\right| \le \alpha_N^2,\quad \alpha_N^2 \to 0,\quad N \to \infty, \tag{8}$$

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_0^0\left(t_i, x_i^0\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right), u_i^{\varepsilon_N}\right) - \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i F_0^0\left(t_i, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)\right| \le \alpha_N^3, \tag{9}$$

$\alpha_N^3 \to 0,\ N \to \infty.$

Далее, в силу равномерной по $u \in D$ липшицевости решений $x^0[u](t)$, $0 \le t \le T$ исходной управляемой системы можем также записать

$$\left|\Delta t_i F_0^0\left(t_i, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_0^0\left(t_i, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt\right| \le C\Delta t_i,$$

с независящей от N постоянной $C > 0$.

Одновременно, в силу равномерной непрерывности функции F_0 по совокупности $(t,x,u) \in [0,T] \times S_M^n \times S_M^m$ при каждом фиксированном $M > 0$, являющейся следствием условия А), можем записать

$$\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_0^0\left(t, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_0^0\left(t_i, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt\right| \le$$

$$\le \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|F_0^0\left(t, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt - F_0^0\left(t_i, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt\right| \le \nu_N \Delta t_i, \tag{10}$$

$\nu_N \to 0,\ N \to \infty.$

Учитывая, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_0^0\left(t, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt = \int_0^T F_0^0\left(t, x^0\left[P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right](t_i), u_i^{\varepsilon_N}\right)dt,$$

из оценок (6) - (10) следует, что

$$\left|I_0^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) - I_0^0\left(P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right)\right| \le \alpha_N^4,\quad \alpha_N^4 \to 0,\quad N \to \infty.$$

Аналогично показывается, что

$$\left|I_1^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) - I_1^0\left(P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right)\right| \le \alpha_N^5,\quad \alpha_N^5 \to 0,\quad N \to \infty.$$

$$\left|I_2^{\delta_N N}\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right) - I_2^0\left(P_N\left([u]_N^{\varepsilon_N}\right)\right)\right| \le \alpha_N^6,\quad \alpha_N^6 \to 0,\quad N \to \infty.$$

Таким образом, в силу полученных оценок и предельного соотношения (7) можно утверждать, что вырабатываемая таким образом последовательность является минимизирующей последовательностью в исходной задаче. Важно заметить, в этой связи, что аппроксимирующая задача $\left(P_{p,q}^N\right)$ содержит параметр γ_N, который должен стремиться к нулю согласованно с величиной μ_N. В противном случае доказанная выше сходимость (7) может нарушаться. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример. Обратимся к примеру из введения. Семейство конечномерных задач оптимизации $\left(P_{p,q}^N\right)$ в данном случае примет вид

$$I_0^N\left([u]_N\right) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \left(x_i^2([u]_N) + u_i^2\right) \to \min,\ [u]_N \in U_N,$$

$$U_N \equiv \left\{\left(u_0, ..., u_{N-1}\right) \in R^N : u_i \in [-1, 1],\ i = 0, .., N-1\right\}, \qquad т\left|I_1^N\left([u]_N\right)\right| \equiv \left|\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i x_i^2([u]_N)\right| \le \gamma_N,$$

$$x_{i+1} = x_i + u_i,\ x_0 = 0,\ \Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i,\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1.$$

Легко видеть, что при $\gamma_N = 0$ нижняя грань $I_0^{N_*}$ этой аппроксимирующей задачи равна 0. Поэтому предельное соотношение (7) в данном примере при $\gamma_N = 0$ не выполняется, так как нижняя грань $\beta(p, q)$ в исходной задаче равна -1.

Литература:

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977.
2. Сумин М.И., Трушина Е.В. О регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина / М.И. Сумин, Е.В. Трушина // Изв. вузов. Математика. 2008. №1. С. 63-77.
3. Сумин М.И., Трушина Е.В. Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными и регуляризирующие свойства принципа максимума / М.И. Сумин, Е.В. Трушина // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. №2. С. 220 - 236.
4. Трушина Е.В. О регуляризирующих свойствах принципа максимума Понтрягина для распределенных систем / Е.В. Трушина // Вестник Нижегородского университета им. Н.В. Лобачевского. Серия Математика. 2008. №1. С. 81-87.
5. Фролагина Е.В. Параметрические задачи оптимального управления с приближенно известным исходными данными / Е.В. Фролагина. – Дис. к. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 2009.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002.